

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات		المادة	
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)		الشعبة أو المسلك	

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte 3 exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte à l'analyse ....(12 pts)

- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes..........(4 pts)

- L'exercice3 se rapporte à l'arithmétique ....(4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (12 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{-2e^x}{1+e^x}+nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

Partie I :

0.5 1-a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-nx+2\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 b) Montrer que la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0.5 2-a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \;\; ; \;\; f_n'(x)=\frac{-2e^x}{\left(1+e^x\right)^2}+n$$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\dfrac{4e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\leq 1$

0.5 c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$

(On distinguera les deux cas : $n=0$ et $n\geq 1$)

0.5 3-a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0

0.5 b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

0.5 4- Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes (C_0) et (C_2).

5- Pour tout réel $t>0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par (C_n) et les droites d'équations respectives : $y=nx-2$, $x=0$ et $x=t$

0.5 a) Calculer $A(t)$ pour tout $t>0$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0=0 \quad \text{et} \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \;\; ; \;\; u_{n+1}=f_0(u_n)$$

0.5 1-a) Montrer que l'équation $f_0(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $|f_0'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

0.5 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α

Partie III :

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$

0.5 1- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$

0.5 b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$

(On prendra $\frac{2e}{1+e} < 1.47$)

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

0.5 c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0.5 3-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

0.5 b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} nx_n = 1$

0.5 4-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

0.5 b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} (x_n)^n$

<u>EXERCICE2</u> : (4 points)

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a+b \neq c$

0.5 1-a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E) \ : \ z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$$

0.5 b) On suppose dans cette question que : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$

1 a) Montrer que : $2p = b + a + (a-b)i$ et $2q = c + a + (c-a)i$

0.5 b) Calculer : $\frac{p-d}{q-d}$

0.5 c) En déduire la nature du triangle PDQ

3- Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$

0.5 a) Montrer que l'affixe de K est $k = a + \frac{i}{2}(c-b)$

0.5 b) Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

EXERCICE3 : (4 points)

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$

0.25 1- Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E)

0.75 2- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4 \ [43]$

1- Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)

0.5 a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1 \ [43]$

0.5 b) Montrer que : $4x \equiv 1 \ [43]$, en déduire que : $x \equiv 11 \ [43]$

0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F)

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant (S) : $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \ [43] \\ x^{47} \equiv 10 \ [47] \end{cases}$

1- Soit x une solution du système (S)

0.5 a) Montrer que x est solution du système (S') : $\begin{cases} x \equiv 11 \ [43] \\ x \equiv 10 \ [47] \end{cases}$

0.5 b) En déduire que : $x \equiv 527 \ [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S)

FIN